

Zad. (i) Napišite formulu za inverz kvadratne matrice drugog reda i primijenite je na matricu $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ (2 boda).

(ii) Zapišite matricu rotaciju u ravni oko y-osi za kut α i njoj inverznu transformaciju. (4 boda).

(iii) Zapišite matricu rotaciju u prostoru oko z-osi za kut α i primijenite je na tačku $(2, 2, 2)$ ako je $\alpha = 45^\circ$. (4 boda)

Rješenje.

(i) Ako je $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, onda je

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Za zadanu matricu $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ je stoga

$$A^{-1} = \frac{1}{2 \cdot 4 - 3 \cdot 1} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(ii) Matrica rotacije za kut α je $A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$,

a matrica inverzne transformacije je $A_{-\alpha} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix}$

(iii) Matrica rotacije oko z-osi za kut α u prostoru

glasi: $A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Za kut $\alpha = 45^\circ$ to je

$$A_{45^\circ} = \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ & 0 \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

je slika tačka $(2, 2, 2)$ dana s

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 + 0 \cdot 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 + 2 \cdot 0 \\ 0 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix},$$

tj. to je tačka $(0, 2\sqrt{2}, 2)$

2. Zad. (i) Zapišite matricno sustav $x-3y+2z=2$
 $x-y-2z=2$ (2 boda)
 $x+y-5z=3$.

(ii) Pokazite da je $B = \begin{pmatrix} 7/2 & -13/2 & 4 \\ 3/2 & -7/2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ inverzna matrica matrice sustava iz (i) i koristeci tu matricu riješite gornji sustav. (4 boda)

(iii) Zapišite neki sustav 2×2 koji nema rješenja i neki sustav koji ima beskonačno mnogo rješenja (4 boda)

Rješenje. (i) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$ matrica sustava

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ matrica nepoznanica

$K = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ matrica slobodnih koeficijenata

Sustav glasi: $A \cdot X = K$

(ii) Treba vidjeti da je $A \cdot B = I$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7/2 & -13/2 & 4 \\ 3/2 & -7/2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 7/2 - 9/2 + 2 & -13/2 + 21/2 - 4 & 4 - 6 + 2 \\ 7/2 - 3/2 - 2 & -13/2 + 7/2 + 4 & 4 - 2 - 2 \\ 7/2 + 3/2 - 5 & -13/2 - 7/2 + 10 & 4 + 2 - 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rješenje sustava iz (i) je dano s $X = A^{-1} \cdot K = B \cdot K =$

$$= \begin{bmatrix} 7/2 & -13/2 & 4 \\ 3/2 & -7/2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/2 \cdot 2 - 13/2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \\ 3/2 \cdot 2 - 7/2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow x=6, y=2, z=1$

(iii) Sustav koji nema rješenja: $\begin{cases} x+y=0 \\ x+y=1 \end{cases}$

Sustav koji ima beskonačno mnogo rješenja: $\begin{cases} x+y=0 \\ 2x+2y=0 \end{cases}$

- 3 3. zad. (i) Zapišite veze koje povezuju funkciju i njoj inverznu funkciju općenito i u slučaju eksponencijalne i logaritamske funkcije. (4 boda)
- (ii) Predočite graf funkcije $f(x) = \arcsin x$.
 Odredite $f(0)$, $f(\frac{1}{2})$ i $f(-\frac{1}{2})$. (4 boda)
- (iii) U istom koordinatnom sustavu predočite grafove funkcija $f(x) = x^3$ i $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ (2 boda).

Rješenje.

(i) $(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \forall x \in D(f)$

$(f \circ f^{-1})(y) = y \quad \forall y \in D(f^{-1}) = R(f)$

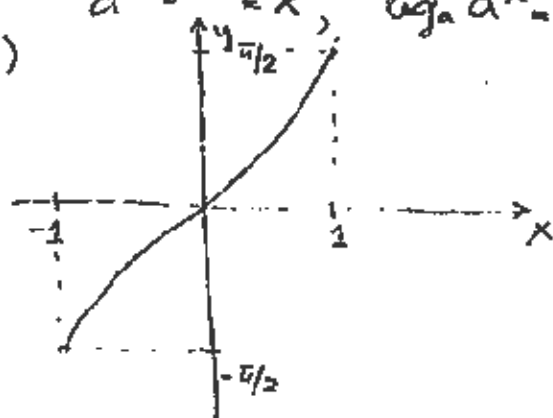
ili $f^{-1} \circ f = id_{D(f)}$

$f \circ f^{-1} = id_{R(f)}$

Ako je $f(x) = a^x$ i $f^{-1}(x) = \log_a x$, onda je

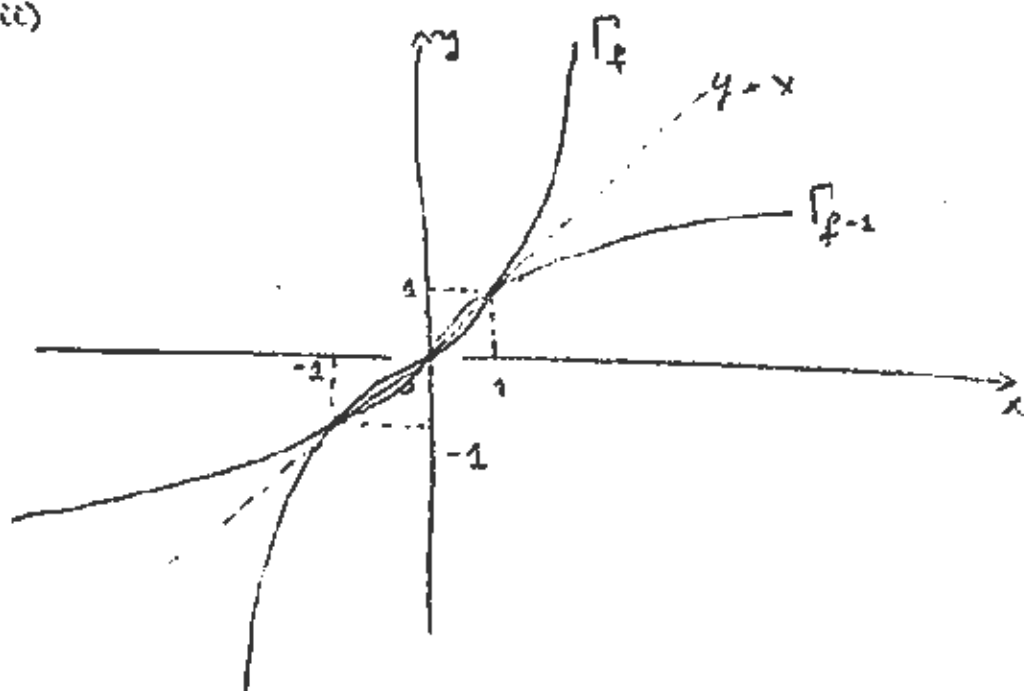
$a^{\log_a x} = x, \quad \log_a a^x = x$

(ii)



$\arcsin 0 = 0$
 $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$
 $\arcsin -\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$

(iii)



4.

4. zad. (i) Napišite formulu za derivaciju funkcije f u x_0 (2 boda)

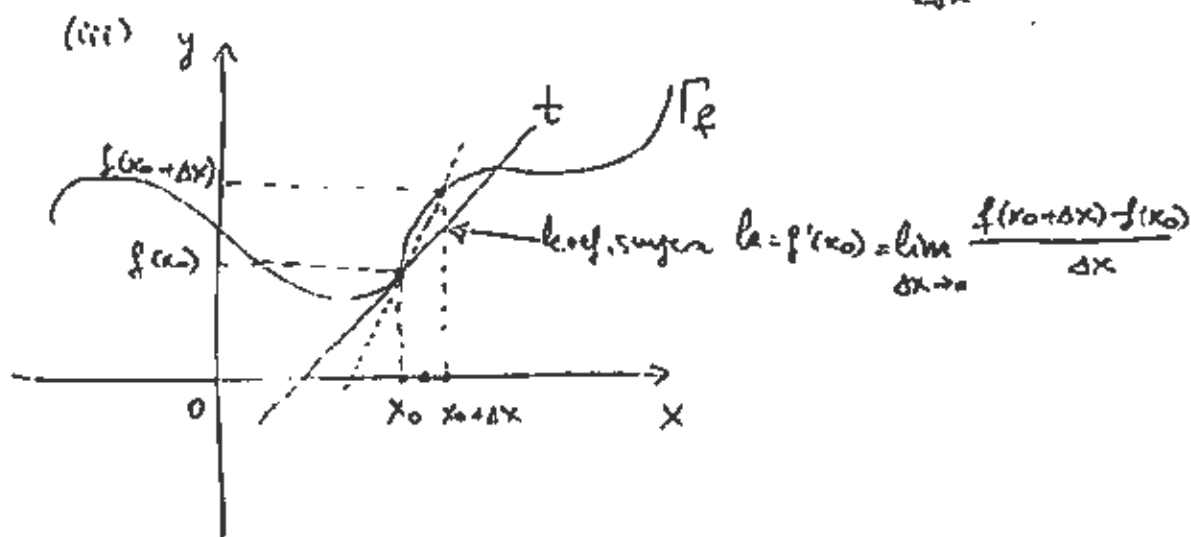
(ii) prema definiciji odredite derivaciju funkcije $f(x) = \sqrt{x}$. (4 boda)

(iii) predložite geometrijski tangenta na graf funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$ i napišite jednačinu te tangente (4 boda)

Rješenje:

$$(i) f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned} (ii) f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x + \Delta x})^2 - (\sqrt{x})^2}{\Delta x (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$



jednačina tangente: $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

5. Zad. (i) Zapišite kriterije pomoću derivacija za rast i pad funkcije. (2 boda)

(ii) Zapišite kriterije za konveksnost i konkavnost funkcije i primijenite ih na $f(x) = x^3$. (4 boda)

(iii) Nacrtajte graf funkcije $f(x) = x^3 - 3x$. (4 boda)

Rješenje.

(i) $f'(x_0) > 0 \rightarrow f$ raste oko x_0
 $f'(x_0) < 0 \rightarrow f$ pada oko x_0

(ii) $f''(x_0) > 0 \rightarrow f$ je konveksna oko x_0
 $f''(x_0) < 0 \rightarrow f$ je konkavna oko x_0

$$\text{Za } f(x) = x^3 \text{ je } f'(x) = 3x^2 \\ f''(x) = 6x$$

$$f''(x) > 0 \Rightarrow 6x > 0 \Rightarrow x > 0 \text{ konveksnost} \\ f''(x) < 0 \Rightarrow 6x < 0 \Rightarrow x < 0 \text{ konkavnost}$$

(iii) $f(x) = x^3 - 3x$

Domena: $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$

Nulta točke: $x^3 - 3x = 0$

$$x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1 \text{ kritične točke}$$

$$f''(x) = 6x \Rightarrow f''(1) = 6 > 0 \Rightarrow (1, f(1)) = (1, -2) \text{ lok. min}$$

$$f''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow (-1, f(-1)) = (-1, 2) \text{ lok. max.}$$

$$\text{rast: } f'(x) > 0 \Rightarrow 3(x^2 - 1) > 0 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow |x| > 1$$

$$\Rightarrow \text{pad: } x \in \langle -1, 1 \rangle$$

$$x \in \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 1, \infty \rangle$$

$$\text{konveksnost: } f''(x) > 0 \Rightarrow 6x > 0 \Rightarrow x > 0$$

$$\Rightarrow \text{konkavnost: } x < 0$$

Graf:

